

18. Matrici

Andrea Marongiu

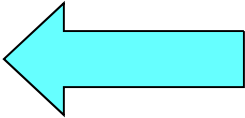
(andrea.marongiu@unimore.it)

Paolo Valente

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA



Contenuto lezione

- Stringhe
- Struct
 - Operazioni
 - Progettazione strutture dati
 - e passaggio parametri
- Matrici statiche 
 - Implementazione
 - Passaggio alle funzioni

Definizione matrice

- Tabella ordinata di elementi
- Esempio bidimensionale:

a_{ij}

m colonne
 j cresce

n righe
 i cresce

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matrice $n \times m$

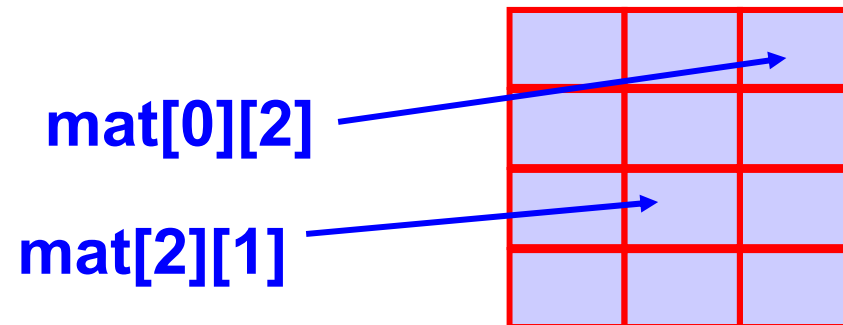
Matrice bidimens. in C/C++

- SINTASSI della definizione di una variabile o di una costante con nome di tipo **matrice bidimensionale statica**:

```
[const] <tipo_elementi_matrice>  
    <identificatore> [<espr-costante>] [<espr-costante>] ;
```

Esempio: matrice di 4x3 oggetti (tutti) di tipo `double`

```
double mat[4][3] ;
```



Esercizio 1

- Scrivere un programma che definisca una matrice bidimensionale di interi, di dimensioni stabilite a tempo di scrittura del programma, ed assegni ad ogni elemento un valore letto da stdin. Infine stampi il contenuto della matrice.

Esercizio 1

```
int main(){
    const int M = 3, N = 2 ;
    int mat[M][N] ;
    cout<<"Inserire i "<<M*N<<" elementi della matrice:"<<endl ;

    for (int i = 0 ; i < M ; i++)
        for (int j = 0 ; j < N ; j++)
            cin>>mat[i][j] ;

    cout<<"Contenuto della matrice: "<<endl ;

    for (int i = 0 ; i < M ; i++)
    {
        for (int j = 0 ; j < N ; j++)
            cout<<mat[i][j]<<"\t" ;
        cout<<endl ; // vai a capo con la nuova riga della matrice
    }

    return 0 ;
}
```

Sintassi matrice k dimensioni

- SINTASSI della definizione di una variabile o di una costante con nome di tipo **matrice statica k-dimensionale**:

```
[const] <tipo_elementi_matrice>  
<identificatore> [<espr-cost_1>] [<espr-cost_2>] ... [<espr-cost_K>] ;
```

- *<espr-cost_i>* è il numero di elementi dell'*i*-esima dimensione
- Per accedere ad un elemento bisogna fornire tanti indici quante sono le dimensioni
 - l'*i*-esimo indice assume valori fra 0 e (*<espr-cost_i>* - 1)
- il generico elemento di una matrice è denotato dal nome della matrice seguito dai valori degli indici racchiusi tra []

Inizializzazione matrici

- Generalizzazione della sintassi per gli *array* monodimensionali

Esempio:

```
int mat[3][4] = { {2, 4, 1, 3},  
                  {5, 3, 4, 7},  
                  {2, 2, 1, 1} } ;
```

- Il numero di colonne **deve** essere specificato
- Il numero di righe può essere omesso, nel qual caso coincide col numero di righe che si inizializzano
- Elementi non inizializzati hanno valori casuali o nulli a seconda che si tratti di un oggetto locale o globale
- Non si possono inizializzare più elementi di quelli presenti

Esercizio 2

- Data una matrice di dimensione $M \times M$ di valori reali inizializzata a tempo di scrittura del programma, si calcoli la differenza tra la somma degli elementi della diagonale principale e la somma degli elementi della diagonale secondaria
- Esempio e suggerimenti nelle prossime slide

Esercizio 2 - Esempio indici matrice 5x5

0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
3,0	3,1	3,2	3,3	3,4
4,0	4,1	4,2	4,3	4,4

Esercizio 2 - Idea

- Gli elementi della diagonale principale sono caratterizzati dagli indici: $[i][i]$
- Gli elementi della diagonale secondaria sono caratterizzati dagli indici: $[i][M-1-i]$
- Quindi, per scandire tutti gli elementi delle due diagonali è sufficiente un unico ciclo (e quindi un solo indice)

Esercizio 2 - Algoritmo

- Inizializzare due variabili a 0 e sommarvi rispettivamente i valori degli elementi della prima e della seconda diagonale
- Stampare il valore finale della variabile che contiene la differenza tra le due variabili

Esercizio 2 - Struttura dati

- Una costante (int) per denotare la dimensione della matrice:
 $M=100$
- Una matrice bidimensionale di double pari a $M \times M$
- Un indice (int) per scandire la matrice
- Due variabili ausiliarie (double) per sommarvi i valori delle diagonali

Esercizio 2 - Programma

```
main() {  
    const int M=100 ;  
    double somma_d1=0., somma_d2=0.;  
    double mat[M][M];  
  
    for (int i=0; i<M; i++)  
        for(int j=0; j<M; j++)  
            cin>>mat[i][j] ;  
  
    for (int i=0; i<M; i++) {  
        somma_d1 = somma_d1+mat[i][i];  
        somma_d2 = somma_d2+mat[i][M-1-i];  
    }  
    cout<<"Differenza valori "  
        <<somma_d1-somma_d2<<endl;  
}
```

Esercizio 3

- Data una matrice di dimensione $M \times N$ di valori interi, si calcoli il numero complessivo di elementi positivi, negativi e nulli

Esercizio 3 - Algoritmo

- Per scandire tutti gli elementi della matrice possiamo utilizzare due cicli innestati
- Inizializzare due variabili a 0 e sommarvi tutti gli elementi che risultano positivi e negativi
- Serve un'altra variabile per gli elementi nulli?
- Stampa il valore finale delle due o tre variabili

Esercizio 3 - Struttura dati

- Due costanti (int) per denotare la dimensione massima delle righe e delle colonne della matrice: $\text{max_R}=100$, $\text{max_C}=1000$
- Una matrice bidimensionale di int pari a $\text{max_R} * \text{max_C}$
- Due (o tre ?) variabili ausiliarie (int) come contatori dei valori positivi e negativi

Esercizio 3 - Programma


```
main()
{
    const int max_R = 100, max_C = 1000 ;
    int positivi=0, negativi=0 ;
    int mat[max_R][max_C];

    <si ipotizza che la matrice venga inizializzata in qualche modo>

    for (int i=0; i<max_R; i++)
        { for (int j=0; j<max_C; j++) {
            if (mat[i][j]>0) positivi++;
            else if (mat[i][j]<0) negativi++;
        }
    }

    cout<<"Valori positivi= "<<positivi<<"", negativi = "<<negativi
    <<"", nulli = "<< (max_R*max_C - positivi - negativi)
    <<endl ;
}
```

Contenuto lezione

- Stringhe
- Struct
 - Operazioni
 - Progettazione strutture dati
 - e passaggio parametri
- Matrici statiche
 - Implementazione 
 - Passaggio alle funzioni

Implementazione matrice

- Considerando la notazione con cui viene definita una matrice e quella con cui si accede ai suoi elementi, forse una matrice è un tipo derivato costruito a partire da un tipo che conosciamo già?

Array di array

- Sì
- Nel linguaggio C/C++, una matrice è a tutti gli effetti un **array di array**
 - Gli array combinati per ottenere una matrice sono organizzati per righe consecutive

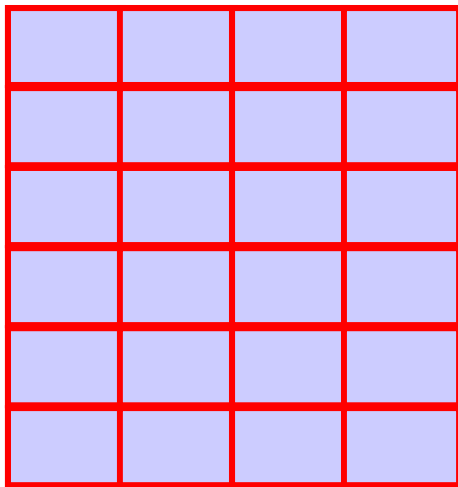
Ad esempio

```
int mat[M][N] ;
```

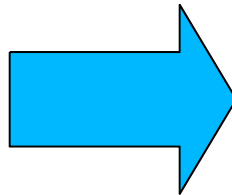
- definisce un array di M array da N elementi ciascuno, ossia M righe da N colonne ciascuna, come mostrato nel seguente esempio numerico

Organizzazione matrice

```
int mat[6][4] ;
```



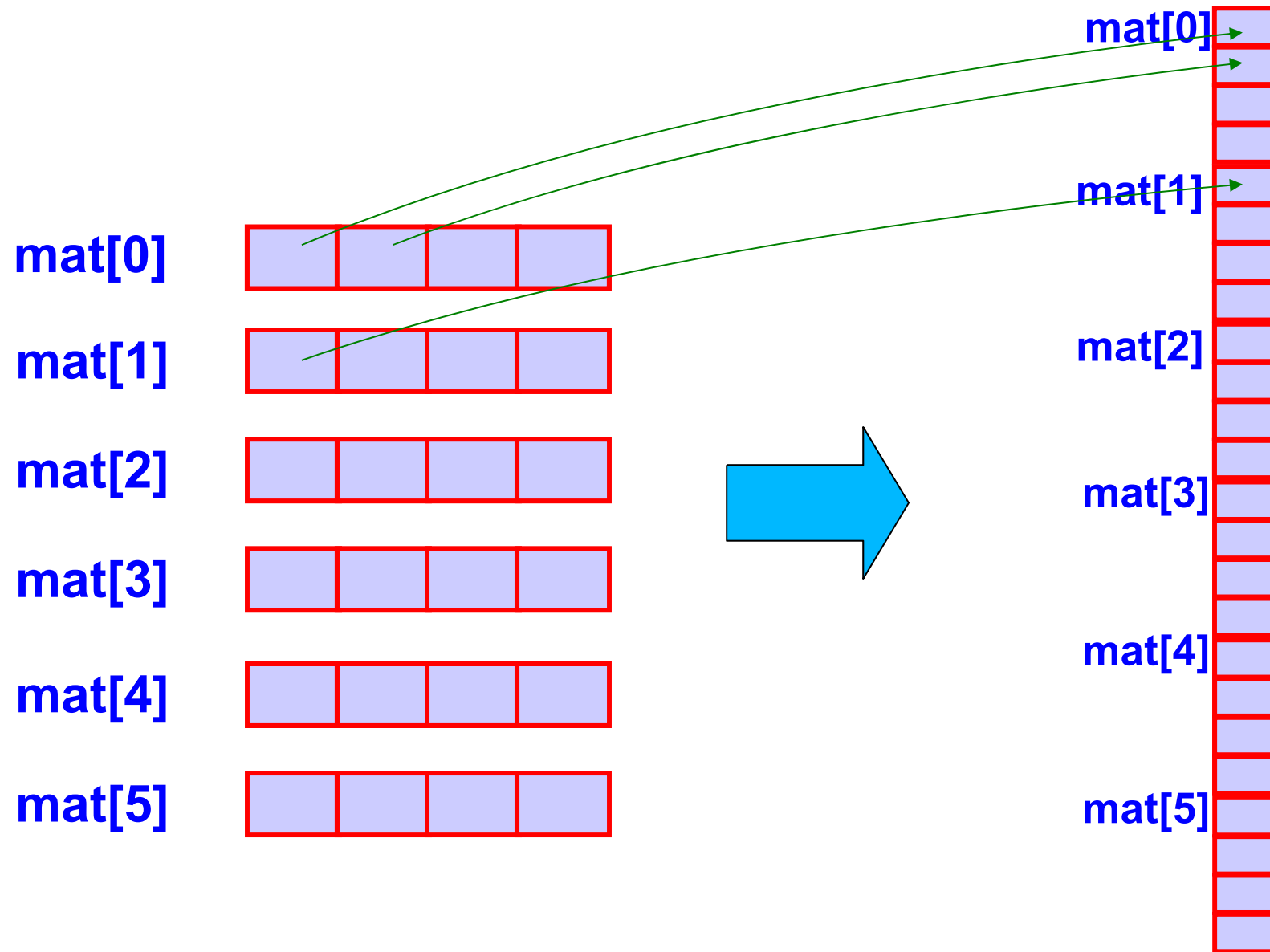
mat[6][4]



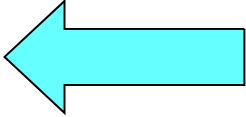
Array di array in memoria 1/2

- Siccome un array è una sequenza contigua di elementi in memoria, allora un array di array è una sequenza contigua di array in memoria
- Un esempio è mostrato nella seguente slide

Array di array in memoria 2/2



Contenuto lezione

- Stringhe
- Struct
 - Operazioni
 - Progettazione strutture dati
 - e passaggio parametri
- Matrici statiche
 - Implementazione
 - Passaggio alle funzioni 

Passaggio righe matrice 2D 1/2

- Riassumendo quanto detto nelle precedenti slide:
- `int mat[M][N] ;`
- definisce un array di M array da N elementi ciascuno
- Cos'è quindi `mat[i]` con $i = 0, 1, \dots, M - 1$?

Passaggio righe matrice 2D 2/2

- E' un *array* di N elementi
- Quindi data una matrice di N colonne, come si passa una delle righe ad una funzione che prende in ingresso un *array* lunghezza N ?
- Vediamo con un esercizio:

Esercizio 4 - Passaggio righe matrice 2D

- Scrivere un programma che definisca una matrice bidimensionale di interi di dimensioni stabilite a tempo di scrittura del programma e la inizializzi con valori letti da `stdin`.
- Successivamente stampi la matrice. Infine calcoli e stampi il valore della somma degli elementi di ciascuna riga.
- La somma degli elementi di ciascuna riga va effettuata mediante una funzione che prende in ingresso un array di interi e ritorna il valore della somma degli elementi.
 - *La funzione non legge nulla da `stdin` e non scrive nulla su `stdout`.*

Esercizio 4 - Passaggio righe matrice 2D

```
int calcola_somma (const int a[], int n){
    int somma = 0 ;
    for (int i = 0 ; i < n ; i++)
        somma += a[i] ;
    return somma ;
}

int main(){
    const int M = 3, N = 2; int mat[M][N];

    cout<<"Inserire i "<<M*N<<" elementi della matrice:"<<endl ;
    for (int i = 0 ; i < M ; i++)
        for (int j = 0 ; j < N ; j++)
            cin>>mat[i][j] ;

    cout<<"Contenuto della matrice: "<<endl ;
    for (int i = 0 ; i < M ; i++) {
        for (int j = 0 ; j < N ; j++)
            cout<<mat[i][j]<<"\t" ;
        cout<<endl ;
    }
    cout<<endl ;
    for (int i = 0 ; i < M ; i++)
        cout<<calcola_somma(mat[i], N)<<endl ;

    return 0 ;
}
```

Passaggio righe matrice 2D 2/2

- ESERCIZIO PER CASA
- Generalizzazione per il passaggio di fette di matrici con più di due dimensioni

Passaggio matrici

- Così come gli array monodimensionali, gli array di array sono **passati per riferimento**
- La dichiarazione/definizione di un parametro formale di tipo matrice bidimensionale è la seguente:
- **[const]** *<tipo_elementi>*
- *<identificatore>* [] [*<numero_colonne>*]
 - Nessuna indicazione del numero di righe !!!
 - La funzione pertanto non conosce implicitamente il numero di righe della matrice
 - Se presente, il qualificatore **const** fa sì che la matrice non sia modificabile
- Nell'invocazione della funzione, una matrice si passa **scrivendone semplicemente il nome**

Esempio

```
const int num_col = 4 ;
```

```
void fun (int mat[][num_col], int num_righe) ;
```

```
main()
```

```
{
```

```
    const int M = 3 ;
```

```
    int A[M][num_col] ;
```

```
    fun(A, M) ;
```

```
    ...
```

```
}
```


Matrici e indirizzi

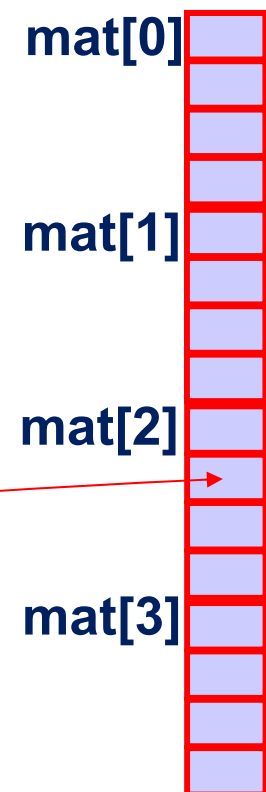
- Di quale informazione ha bisogno il compilatore per poter generare il codice che accede al generico elemento di una matrice?
 - Dell'indirizzo di tale elemento in memoria
- Di quali informazioni ha bisogno per calcolare tale indirizzo?
 - Ricordate che le righe sono memorizzate l'una dopo l'altra

Matrici e indirizzi

- 1) La prima locazione in cui è memorizzata la matrice
- 2) Le dimensioni di ciascun elemento (numero di byte occupate, dipende dal tipo degli elementi)
- 3) La lunghezza di ciascuna riga, ossia il numero di colonne della matrice

- Tali informazioni servono per accedere, ad esempio, al secondo elemento della terza riga di questa matrice, ossia l'elemento di indici [2][1]
- L'indirizzo dell'elemento è infatti dato da:

$$\text{indirizzo_matrice} + \text{dim_elementi} * (\text{lun_riga} * 2 + 1)$$



Indirizzo generico elemento

- In generale l'indirizzo del generico elemento di indici i e j è dato da

$$\text{indirizzo_matrice} + \text{dim_elementi} * (\text{lun_riga} * i + j)$$

- Alla luce di quanto abbiamo appena capito, come mai è obbligatorio passare il numero di colonne?
 - *Perché, come visto, è necessario conoscere il numero di colonne di una matrice bidimensionale per calcolare l'indirizzo di un suo generico elemento*

Array di stringhe

Per analogia con quanto detto in precedenza, un array di stringhe si realizza mediante una matrice di tipo `char`

Esempio: Elenco dei nomi dei giorni della settimana:

```
char giorni[7][11] =  
{ "lunedì", "martedì", "mercoledì",  
  "giovedì", "venerdì", "sabato",  
  "domenica" } ;
```

l	u	n	e	d	i	'	\0			
m	a	r	t	e	d	i	'	\0		
m	e	r	c	o	l	e	d	i	'	\0
g	i	o	v	e	d	i	'	\0		
v	e	n	e	r	d	i	'	\0		
s	a	b	a	t	o	\0				
d	o	m	e	n	i	c	a	\0		

Esercizio 5

- Scrivere una funzione

```
bool quadratomagico (int q[][N]);
```

- che verifica se una matrice quadrata di interi di ordine N e' un quadrato magico, ovvero se la somma degli elementi di ogni riga, di ogni colonna e delle diagonali è identica. La funzione ritorna "1" se la matrice è un quadrato magico, "0" altrimenti.
- Esempio di quadrato magico 3x3:
2 9 4
7 5 3
6 1 8
- scrivere anche un semplice main() che: a) definisce una matrice NxN; b) richiede l'immissione da tastiera degli elementi della matrice; c) richiama la funzione, passandole come parametro la matrice; d) stampa il risultato della computazione.

Esercizio 5

```
const int N = 3;
bool quadratomagico (int q[][N]) {
    int s, somma = 0;           // Inizializzazione di somma
    for (int j=0; j<N; j++)
        somma += q[0][j];

    for (int i=1; i<N; i++) { // Verifica righe
        s = 0;
        for (int j=0; j<N; j++)
            s += q[i][j];
        if (s != somma) return false;
    }
    for (int j=0; j<N; j++) { // Verifica colonne
        s = 0;
        for (int i=0; i<N; i++)
            s += q[i][j];
        if (s != somma) return false ;
    }
    // Verifica diagonale principale
    s = 0;
    for (int i=0; i<N; i++)
        s += q[i][i];
    if (s != somma) return false ;
    //Verifica diagonale secondaria
    s = 0;
    for (int i=0; i<N; i++)
        s += q[i][N-1-i];
    if (s != somma) return false ;

    return true ;
}
```

```
void stampa (int mat[][N]){
    for (int i=0; i<N; i++) {
        cout<<endl ;
        for (int j=0; j<N; j++)
            cout<<mat[i][j]<<"\t" ;
    }
    cout<<endl ;
}

main() {
    int m[N][N] ;
    cout<< "Inizializzazione del
quadrato "<<N<<"x"<<N<<":\n" ;

    for (int i=0; i<N; i++)
        for (int j=0; j<N; j++)
            cin>>m[i][j] ;

    cout<< "\nIl quadrato:"<<endl ;
    stampa(m);
    cout<<(quadratomagico(m) ? "\n"
: "\nnon ")<<"e' un quadrato
magico."<<endl ;
}
```

Esercizio 6

- Scrivere un programma che chieda all'utente di inserire il valore degli elementi di due matrici, in generale non quadrate, e di dimensioni predefinite (a tempo di scrittura del programma), effettui la somma di tali matrici e stampi la matrice risultante.
- L'inserimento dei valori in ciascuna delle due matrici deve essere effettuato mediante una funzione che prenda in ingresso la matrice (una sola) da inizializzare e tutte le eventuali altre informazioni necessarie.
- La stampa dei valori di ciascuna delle due matrici deve essere effettuata mediante una funzione che prenda in ingresso una (sola) matrice e tutte le eventuali altre informazioni necessarie.
- La somma deve essere effettuata da una funzione che prende in ingresso due matrici e tutte le eventuali altre informazioni necessarie, e mette il risultato in una terza matrice.

Esercizio 6

```
const int N = 2;

void stampa (int mat[][N], int m)
{
    for (int i=0; i<m; i++) {
        for (int j=0; j<N; j++)
            cout<<mat[i][j]<<"\t" ;
        cout<<endl ;
    }
}

void riempi (int mat[][N], int m)
{
    for (int i=0; i<m; i++) {
        for (int j=0; j<N; j++)
            cout<<"Inserisci valore di riga «
                <<i+1<<" colonna " <<j+1<<" : \n" ;
            cin>>mat[i][j] ;
    }
}

void somma_matrici (const int A[][NUM_C],
                   const int B[][NUM_C],
                   int ris[][NUM_C],
                   int m)
{
    for (int i=0; i<m; i++) {
        for (int j=0; j<N; j++)
            ris[i][j]=A[i][j] + B[i][j];
    }
}
```

```
main() {
    const int NUM_R = 3 ;
    int mat1[NUM_R][NUM_C],
        mat2[NUM_R][NUM_C],
        mats[NUM_R][NUM_C];

    cout<<"Caricamento matrice 1\n" ;
    riempi_matrice(mat1, NUM_R) ;

    cout<<"Caricamento matrice 2\n" ;
    riempi_matrice(mat2, NUM_R) ;

    /*Visualizzazione*/
    cout<<"Matrice 1:\n" ;
    stampa_matrice(mat1, NUM_R) ;
    cout<<"Matrice 2:\n" ;
    stampa_matrice(mat2, NUM_R) ;

    /*Calcolo della matrice somma*/
    somma_matrici(mat1, mat2, mats, NUM_R) ;
    /*Visualizzazione della matrice somma*/
    cout<<"Matrice somma:\n" ;
    stampa_matrice(mats, NUM_R) ;

    return 0;
}
```


Esercizio 7

- Data una matrice quadrata A di dimensione M (M righe ed M colonne) (sia a_{ij} l'elemento individuato dalla riga i -esima e dalla colonna j -esima), si dice trasposta di A una matrice quadrata B di dimensione M (sia b_{nm} l'elemento individuato dalla riga n -esima e dalla colonna m -esima), tale che $a_{ij} == b_{ji}$ ove $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq M$.
- In sostanza la trasposta fa corrispondere alla prima riga di A , la prima colonna di B , alla seconda riga di A la seconda colonna di B e così via. (Gli indici dei coefficienti utilizzati nella definizione sono ovviamente quelli 'matematici': considerando, ad esempio, la prima riga, il primo elemento ha indice 1 e l'ultimo ha indice N).
- Ad esempio, data la matrice
1 4 2 1 3 8
3 6 7 la trasposta è 4 6 2
8 2 5 2 7 5
- Scrivere un programma che, data una matrice (quadrata) di interi, la stampa, ne calcola la trasposta e stampa la nuova matrice così ottenuta.
- La matrice di partenza va definita a tempo di scrittura del programma.
- Sia il calcolo della trasposta che la stampa devono essere implementate, rispettivamente, in due funzioni dedicate.

Esercizio 7

- ALGORITMO per il calcolo della matrice trasposta
- Quando $i == 0$, scorro la prima riga e ne scambio gli elementi con quelli della prima colonna.
- Quando $i > 1$, lavoro sulla sottomatrice che parte dalla colonna e dalla riga di indice i , e di nuovo scambio riga e colonna.
- Lavoro sull'array contenitore (quadrato) che contiene la matrice, ottenendo implicitamente lo scambio riga/colonna della matrice contenuta.
- Nel ciclo più interno parto da $j=i+1$ perché sarebbe inutile scambiare il primo elemento della (sottomatrice) con se stesso

Esercizio 7

```
const int M = 3;

void stampa (int mat[][N], int m)
{
    for (int i=0; i<m; i++) {
        for (int j=0; j<N; j++)
            cout<<mat[i][j]<<"\t" ;
        cout<<endl ;
    }
}

void trasposta(int m[][M])
{
    for (int i = 0 ; i < M ; i++)
        for (int j = i + 1 ; j < M ; j++)
        {
            m[i][j] -= m[j][i] ; // a == x - y
            m[j][i] += m[i][j] ; // b == x
            // a == -(x-y-x) == -(-y) == y
            m[i][j] = -(m[i][j]-m[j][i]) ;
        }
}
```

```
main() {
    int m[M][M] = { {1, 2, 8},
                    {4, 5, 3},
                    {7, 8, 4} };

    cout<<"Matrice iniziale:\n" ;
    // stampa della matrice originaria
    stampa_matrice(m, M);
    // calcolo della matrice trasposta
    trasposta(m);
    cout<<"Dopo la 1 trasposizione:\n" ;
    // stampa della matrice trasposta
    // con una nuova trasposizione
    // riottengo la matrice originaria
    stampa_matrice(m, M);
    cout<<"Dopo la 2 trasposizione:\n" ;
    trasposta(m) ;

    // stampa della matrice originaria
    stampa_matrice(m, M) ;
}
```

Esercizio 8 - Battaglia navale semplificata

- Realizzare un programma che, dopo aver fatto creare una mappa 10x10 con 12 navi da 1 cella in posizioni casuali, consenta ad un giocatore di “scoprire” tutte le posizioni delle navi avversarie.
- La classifica dei record viene mantenuta rispetto al numero dei colpi necessari per scoprire tutte le navi nemiche.
- Estensione: si visualizzi la mappa, con la posizione delle navi scoperte, i tiri effettuati andati a vuoto, e quelli andati a buon fine
- Per implementare bene il programma partire dalla realizzazione delle seguenti funzioni propedeutiche

Esercizio 8 - Battaglia navale semplificata

FUNZIONI PROPEDEUTICHE

- Scrivere una funzione **INSERT** che riceva in input un numero di navi e le inserisca casualmente in una mappa di dimensioni 10x10
 - Si assuma che ciascuna nave occupi 1 cella
 - Si faccia attenzione a non posizionare le navi in celle coincidenti
- Scrivere una funzione **TIRO** che riceva in input una coordinata (ovvero due elementi interi), e restituisca se il tiro ha colpito o meno una nave

Esercizio 9 - Battaglia navale completa

- Scrivere un programma che
 - crei una mappa con le seguenti navi in posizioni casuali:
 - 1 nave da 4 celle, 2 navi da 3 celle, 3 navi da 2 celle, 4 navi da 1 cella (scegliere a proprio piacimento le dimensioni della mappa)
 - consenta ad un giocatore di “scoprire” le posizioni delle navi avversarie
 - Mantenga una classifica dei record rispetto al numero dei colpi necessari per scoprire tutte le navi nemiche
- Estensione: si visualizzi la mappa, con la posizione delle navi scoperte, i tiri effettuati andati a vuoto, e quelli andati a buon fine
- Per implementare bene il programma partire dalla realizzazione delle seguenti funzioni propedeutiche

Esercizio 9 - Battaglia navale completa

FUNZIONI PROPEDEUTICHE

- Data una mappa di dimensione $M \times M$, si inseriscano casualmente (in posizioni non sovrapposte):
 - 1 nave da 4 celle
 - 2 navi da 3 celle
 - 3 navi da 2 celle
 - 4 navi da 1 cella
- Si accettano navi in diagonale?
- Scrivere poi una funzione che, presa in ingresso una coordinata, stampi su video se il tiro ha colpito o meno una nave

Esercizio 10 – Gioco della vita

- Una mappa di dimensione $N \times M$ rappresenta il mondo. Ogni cella può essere occupata o meno da un organismo. Partendo da una configurazione iniziale di organismi, questa popolazione evolve nel tempo secondo tre regole genetiche:
 - un organismo sopravvive fino alla generazione successiva se ha 2 o 3 vicini;
 - un organismo muore, lasciando la cella vuota, se ha più di 3 o meno di 2 vicini;
 - ogni cella vuota con 3 vicini diventa una cella di nascita e alla generazione successiva viene occupata da un organismo.
- Si visualizzi l'evoluzione della popolazione nel tempo

Esercizio 10 – Gioco della vita

NOTA

- Il concetto di “vicinanza” in una tabella raffigurante il mondo può essere interpretato in 2 modi:
 - Al di là dei bordi c'è il vuoto che non influenza il gioco, per cui ci sono punti interni che hanno 8 potenziali “vicini”, punti sulle righe e colonne estreme che hanno 5 “vicini”, punti ai vertici che hanno 3 “vicini”
 - I bordi estremi confinano tra di loro: la colonna “0” è “vicina” alla colonna “M-1”, così come la riga “0” è “vicina” alla riga “N-1” (con attenzione a trattare i vertici!)